5К

УДК 004.93:519.71

В.А. Козловский, В.С. Молчанова
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк
kozlovskii@iamm.ac.dn.ua, vp24@yandex.ru

Построение автоматных моделей простейших графических примитивов

В статье рассматривается задача векторизации растрового изображения простейших графических примитивов. Предлагается алгоритм описания растровых изображений отрезков прямых и эллипсов и их простейших комбинаций в в виде систем автоматных уравнений.

Введение

Проблема компактного описания растровых изображений по-прежнему является актуальной, и предлагаются различные методы ее решения. Их эффективность в значительной степени определяется типом изображений [1]. По-видимому, в общем случае, нет эффективного перехода от растрового изображения к их векторному описанию.

В работе предлагается способ такого перехода для графических изображений, которые можно синтезировать на основе небольшого набора простых графических примитивов. Например, для чертежей в основном достаточно отрезков прямых и кривых второго порядка. Идея предлагаемого перехода опирается на автоматное представление графических примитивов системами уравнений, задающих генерирующий автомат. В данной работе излагается общая идея синтеза генерирующего автомата и дается построение автомата, описывающего эллипс. Таким образом, **целью работы** является разработка алгоритма получения компактного описания растровых изображений графических примитивов на основе автоматных моделей.

Синтез автомата, генерирующего отрезок прямой

Будем исходить из следующих предположений. Исходное изображение является растровым, под растром понимаем прямоугольную матрицу конечной размерности, элементы которой равны 0 или 1, в зависимости от наличия или отсутствия фрагмента изображения, попадающего на элемент матрицы. В более общем случае каждому элементу может сопоставляться некоторое число, указывающее оттенки серого или цветность. Геометрически растр интерпретируется как фрагмент декартовой плоскости, разбитой на квадраты, вершины которых имеют целочисленные координаты. Каждому такому квадрату сопоставляем координату его правой верхней вершины.

Описание объектов будем выполнять в алфавите непроизводных символов $V = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ цепочечного кода Фримена [2], геометрический смысл которых ясен из рис.1.

Слово в этом алфавите, кодирующее образ или его фрагмент, будет формироваться некоторым автоматом-генератором. В общем случае образ может задаваться совокупностью W таких слов. Если такое множество W задано априори, то его можно понимать как задание на синтез автомата, генерирующего данное множество, возможно, из разных состояний.

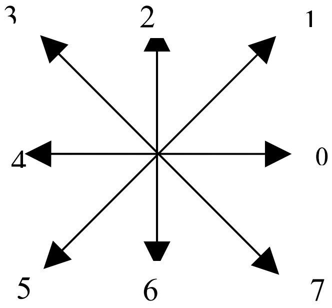


Рисунок 1 – Непроизводные элементы

Под автоматом (инициальным) понимаем шестерку $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$, где S – конечное множество состояний, X – конечное множество входных символов (входной алфавит), Y – конечное множество выходных символов (выходной алфавит), δ – функция переходов, определяющая следующее состояние, λ: $S \times X \to Y$ – функция выходов, $s_0 \in S$ – начальное состояние [3]. Если все три множества S, X, Y конечны, автомат называется конечным. Так как рассматриваются автоматы-генераторы, то автомат можно считать автономным, т.е. таким, функции переходов и выходов которого не зависят от входов, и автомат A можно рассматривать как пятерку $(S, Y, \delta, \lambda, s_0)$. Основным способом задания автомата выберем его описание в виде системы уравнений в некотором поле или кольце, что принципиально уменьшает размер описания автомата по сравнению с его заданием таблицей переходов-выходов.

Будем полагать, что на растре задана декартова система координат, начало которой совпадает с нижней левой точкой растра. Рассмотрим в этой декартовой плоскости прямую a и отрезок AB на ней с концами $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Пусть a описывается уравнением $y=kx$ (1) , где $k = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ (2), причем k – положительное рациональное, не равное 1 и представлено в виде несократимой дроби m/n. Растровое изображение такой прямой может быть сформировано на основе различных моделей. Близкой к излагаемой ниже модели является модель Брезенхема [4]. Модель Брезенхема основывается на расчете значения функции, задающей прямую, и определении знака накапливаемой ошибки, возникающей при округлении значения функции до целого значения. Тогда направление перемещения из одной клетки изображения в следующую определяется по знаку этой ошибки.

В отличие от метода Брезенхема предлагается способ формирования дискретной прямой на основе минимального отклонения растрового изображения от идеальной прямой, что представляется более естественным по сравнению с методом Брезенхема. На основании этого строится система автоматных уравнений, генерирующих описание изображения растровой прямой. Затем аналогичный прием используется и для описания окружности или эллипса.

Рассмотрим соответствующий автомат-генератор A (автономный). Множеством его состояний является множество пар (S_x, S_y), где S_x, и S_y – целые неотрицательные, не превышающие n, а выходным алфавитом является $Y = \{0, 1, 2\}$. Указанные значения интерпретируются следующим образом: S_x определяет смещение автомата по изображению вдоль оси абсцисс от начала координат, S_y определяет аналогичное смещение вдоль оси ординат; Y определяет направление смещения по отношению к текущей клетке изображения (0 – движение вдоль оси абсцисс, 2 – движение вдоль оси ординат, 1 – движение по диагонали вверх).

Положим $S_x(0) = 0$, $S_y(0) = 0$, $Y(0) = 0$.

Так как S_x и S_y целые, а k может быть дробным, то при округлении произведения $kS_x(i)$ к ближайшему целому возникает погрешность Δ, поэтому уравнение прямой (1) перепишем в виде (3).

$$S_y(i) = k \cdot S_x(i) + \Delta. \qquad (3)$$

Целочисленные значения S_x и S_y на каждом шаге будут изменяться не более, чем на 1, поэтому введем вспомогательные параметры $\alpha(i)$, $\beta(i)$, с использованием которых (3) перепишем в виде:

$$S_y(i-1) + \beta(i) = k \cdot (S_x(i-1) + \alpha(i)) + \Delta, \qquad (4)$$

где $\alpha(i)$ и $\beta(i)$ указывают смещение автомата на i-м шаге по оси x или y соответственно, и $\alpha(i), \beta(i) \in \{0, 1\}$, $\alpha(i) + \beta(i) \neq 0$. Параметры $\alpha(i)$ и $\beta(i)$ подбираем таким образом, чтобы $|\Delta|$ был минимальным. Понимая $|\Delta|$ как функцию $f(\alpha(i), \beta(i)) = |(S_y(i-1) + \beta(i)) - k(S_x(i-1) + \alpha(i))|$, определим $(\alpha(i)^*, \beta(i)^*)$, при которых $(f(\alpha(i), \beta(i)))$ достигает минимума, где минимум берется по всем $\alpha(i), \beta(i)$ таким, что $\alpha(i), \beta(i) \in \{0, 1\}$, $\alpha(i) + \beta(i) \neq 0$.

Значения $Y(i)$ также рассмотрим как зависящие от $\alpha(i), \beta(i)$, т.е. $Y(i) = Y(\alpha(i), \beta(i))$, и $Y(1,0) = 0$, $Y(1,1) = 0$, $Y(0,1) = 2$, а $Y(0,0)$ не определено. Так как $\alpha(i)$ и $\beta(i)$ в рассматриваемом случае одновременно не могут принимать значение 0, то $Y(0,0)$ может быть взято произвольным. В данном случае положим $Y(0,0) = 1$.

Пусть $sign(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma > 0 \\ 0, & \gamma = 0 \\ -1, & \gamma < 1 \end{cases}$,

тогда на основании вышесказанного $Y(\alpha(i), \beta(i))$ можно представить в виде:

$$Y(\alpha(i), \beta(i)) = 1 + sign(\beta(i) - \alpha(i)), \qquad (5)$$

и для автомата, генерирующего слово описания прямой $y = (m/n)x$, можно указать задающие его следующие уравнения:

$$\begin{cases} S_x(i) = (S_x(i-1) + sign(2 - Y(i-1))) \bmod m \\ S_y(i) = (S_y(i-1) + sign(Y(i-1))) \bmod n \\ Y(i) = 1 + \mathrm{sign}(\beta(i)^* - \alpha(i)^*) \\ S_x(0) = 0, \quad S_y(0) = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases} . \qquad (6)$$

Приведенные рассуждения справедливы для отрезков на прямых, у которых $k > 0$. При $k < 0$ отрезку на прямой $y = kx$ можно сопоставить симметричный ему относительно оси y отрезок на прямой $y = |k|x$. Из рис. 1 видно, что направлениям «0», «1» и «2», использованным при описании отрезка прямой с $k > 0$, относительно оси y симметричны направления «0», «7» и «6» при движении слева направо. Для описания отрезка на прямой $y = kx$ ($k < 0$) необходимо описать отрезок на прямой $y = |k|x$, а затем выполнить перекодировку: «0» – «0», «1» – «7», «2» – «6».

Из уравнений (6) следует, что, как и в других моделях, слова, сформированные предложенным автоматом и описывающие отрезки прямых, являются подсловами некоторых периодических слов. Слово P называется периодическим, если его можно представить в виде $P = P_1^k$, где P_1^k обозначает k раз повторенное слово P_1, $k = 1, 2,...$; наименьшее такое k называется периодом слова P. В [2] было предложено автоматное описание слов, соответствующих прямым при другом способе перехода к растровому изображению прямой. Предложенный способ описания позволяет привести к единой форме описание как прямых, так и кривых второго порядка.

Синтез автомата, генерирующего окружность и эллипс

Одним из наиболее часто встречающихся вариантов кривой второго порядка является окружность. В силу симметричности окружности достаточно построить автомат, генерирующий одну из ее четвертей, остальные четверти окружности могут быть получены путем симметричных отражений первой относительно осей координат.

Построим автомат для первой четверти окружности. Состояние автомата определяется парой (S_x, S_y), $S_x \in (0, r–1)$, $S_y \in (0, r–1)$, где r – радиус окружности (r натуральное). Будем считать, что изначально автомат находился в точке (0, 0), т.е. $S_x(0) = 0$, $S_y(0) = 0$, и на каждом такте хотя бы одна из составляющих состояния должна увеличиться на 1. Рассматриваем следующие варианты движения от построенной точки: вправо на 1 позицию, по диагонали вправо вниз на позицию, вниз на 1 позицию, что будет соответствовать выходным значениям автомата 1,0, –1, которые кодируются соответственно кодами «0», «7», «6» алфавита V. Поэтому примем $Y = \{– 1, 0, 1\}$.

Используя те же рассуждения, что и при построении описания отрезка прямой, получим следующие уравнения функционирования автомата:

$$\begin{cases} S_x(i) = \left(S_x(i-1) + \mathrm{sign}(Y(i-1))\right) \bmod r \\ S_y(i) = \left(S_y(i-1) + \mathrm{sign}(-Y(i-1))\right) \bmod r \\ Y(i) = \alpha(i)^* + \beta(i)^* \\ S_x(0) = 0,\ S_x(0) = 0 \\ Y(0) = 1 \end{cases} . \qquad (7)$$

Здесь $(\alpha(i)^*, \beta(i)^*) = argmin(f(\alpha(i), \beta(i)))$ для функции $f(\alpha(i), \beta(i)) = |r^2 – ((S_x(i) + \alpha(i))^2 + (r – S_y(i) + \beta(i))^2|$, и минимум берется по всем $\alpha(i)$, $\beta(i)$, таким, что $\alpha(i) \in \{0,1\}$, $\beta(i) \in \{–1, 0\}$, $\alpha(i)^2 + \beta(i)^2 \neq 0$.

Изменив формулу для $f(\alpha(i), \beta(i))$ можно получить описание первой четверти эллипса с осями a и b, параллельными осям координат. В этом случае
$f(\alpha(i),\beta(i)) = |a^2b^2 – (S_x(t) + \alpha(i))^2b^2 – (S_y(t) + \beta(i))^2a^2|$ и $arg\ min(f(\alpha(i), \beta(i)))=(\alpha(i)^*, \beta(i)^*)$.

При построении эллипса автомат-генератор возвращается в начальное состояние, когда $S_x(t) = a$, $S_y(t) = b$.

Поскольку изначально в качестве алфавита описания образов использовался алфавит $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, а в рассмотренном выше способе решения для кодировки используются символы из множества $V' = \{–1, 0, 1\}$ для указания направлений «0», «6» и «7», определим правило преобразования символов алфавита V' в символы алфавита V.

Пусть v – символ из алфавита V, v' – символ из алфавита V'. Легко заметить, что $v = v'+7$.

При построении первой четверти будет получено слово $P_1=\alpha_1(1)\alpha_1(2)\ldots\ \alpha_1(t)\ldots\ \alpha_1(k)$. Вторая четверть окружности симметрична первой относительно оси ординат и соответствующее выходное слово P_2 может быть получено следующей перекодировкой: $\alpha_2(i) = 12–\alpha_1(i)$. Для третьей четверти выходное слово P_3 будет получено по соотношению: $\alpha_3(i) = 8–\alpha_2(i)$, а для четвертой – $\alpha_4(i)=4 – \alpha_3(i)$.

Построение произвольных кривых второго порядка

Выше рассмотрена задача построения эллипса, у которого оси параллельны координатным. Предложенный подход может быть распространен и на случай более общей задачи описания произвольной кривой второго порядка.

Уравнение кривой второго порядка, у которой оси параллельны координатным, имеет вид: $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, если оси кривой не параллельны координатным, то она задается уравнением: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (8).

Общая структура уравнения (8) может быть использована для описания произвольной кривой второго порядка. Особенности этой кривой фиксируются функцией $f(a,b)$:

$$f(\alpha(i),\beta(i)) = |A(S_x(i) + \alpha(i))^2 + 2B(S_y(i) + \beta(i))(S_x(i) + \alpha(i)) + C(S_y(i) + \beta(i))^2 + 2D(S_x(i) + \alpha(i)) + 2E(S_y(i) + \beta) + F|, \text{ и } argmin(f(\alpha(i),\beta(i))) = (\alpha(i)^*, \beta(i)^*),$$

где минимум берется по всем $\alpha(i)$, $\beta(i)$, таким, что $\alpha(i) \in \{0, 1\}$, $\beta(i) \in \{-1,0\}$, $\alpha(i)^2 + \beta(i)^2 \neq 0$. Тогда $Y(i) = \alpha(i)^* + \beta(i)^*$. В случае произвольной кривой второго порядка предварительно необходимо ограничить область, на которой эта кривая строится.

Предложенные описания задают прямые, окружности и эллипсы, линия контура которых имеет «единичную» толщину. Расширим этот способ на контуры большей толщины.

Окружность с толщиной линии контура m и радиусом r (при относительно малом отношении m/r) описывается как конкатенация слов $Y(r)$, $Y(r - 1)$, …, $Y(r - m + 1)$. Эллипс с толщиной линии контура m и осями a и b описывается как конкатенация слов $Y(a,b)$, $Y(a - 1,b - 1)$, …, $Y(a - m + 1, b - m + 1)$.

Рассмотренный подход синтеза генерирующего автомата опирается на структурные особенности образов, отраженных в данном случае в уравнении, задающих непрерывный прототип растрового изображения. Возможен и другой подход к решению задачи. Он исходит из произвольности множества слов W, формируемых специальным обходом автомата-сканера, по которым строится система уравнений генерирующего автомата. В этом случае необходимо наложить ограничения на систему уравнений, например, можно рассматривать автомат, реализуемый на сдвиговом регистре с линейной обратной связью. Учитывая мощность алфавита V, его элементы можно рассматривать как элементы поля Галуа $GF(8)$. Пусть W состоит из одного слова. Тогда для построения автомата с наименьшей линейной сложностью, т.е. с наименьшей длиной регистра, можно использовать алгоритм Берлекэмпа-Месси [5]. В более общем случае, когда линейная сложность велика, можно перейти к построению нелинейных уравнений, или к сдвиговым регистрам с нелинейной обратной связью. Если мощность W больше 1, то предварительно можно выделить общие суффиксы у слов, входящих в W, что позволит уменьшить сложность синтезируемого автомата. При этом можно использовать методы синтеза автоматов по наблюдаемому поведению [6].

Заключение

В статье описана задача синтеза автоматов-генераторов синтаксических описаний линии, окружности, эллипса и произвольных кривых второго порядка. Такие описания могут служить основой для формирования векторного описания сложных образов, синтезированных из указанного набора простых геометрических примитивов. Использование автоматных моделей позволяет привлечь для решения задач анализа и синтеза образов богатый аппарат теории автоматов.

На основании полученных моделей разработана программа, позволяющая получать синтаксическое описание растровых изображений и строить по ним их векторное описание и обратно.

Литература

1. Абламейко С.В. Обработка изображений: технология, методы, применение / С.В. Абламейко, Д.М. Лагуновский. – Минск : Амалфея, 2000. – 304 с.
2. Введение в контурный анализ; приложения к обработке изображений и сигналов / Я.А. Фурман, А.В Кревецкий, А.К. Передреев и др. ; под ред. Я.А. Фурмана. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 592 с.
3. Кудрявцев В.Б. Введение в теорию автоматов / В.Б. Кудрявцев, С.В. Алешин, А.С. Подколзин. – М. : Наука, 1985. – 320 с.
4. Шикин А.В. Компьютерная графика. Полигональные модели / А.В. Шикин, А.В. Боресков. – М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 2001. – 464 с.
5. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки / Блейхут Р. – М. : Мир, 1986. – 576 с.
6. Грунский И.С. Синтез и идентификация автоматов / И.С. Грунский, В.А. Козловский. – Киев : Наук. думка, 2004. – 245 с.
7. Деглина Ю.Б. Автоматные алгоритмы синтеза образов / Ю.Б. Деглина, В.С. Денисова, В.А. Козловский // Искусственный интеллект. – 2008. – № 3. – С. 290-295.

В.А. Козловський, В.С. Молчанова

Побудова автоматних моделей найпростіших графічних примітивів

У статті розглядається задача векторизації растрового зображення найпростіших графічних примітивів. Пропонується алгоритм опису растрових зображень відрізків прямих і еліпсів і їх найпростіших комбінацій у вигляді систем автоматних рівнянь.

V.A. Kozlovsky, V.S. Molchanova

Construction of Automaton Models of the Simplest Graphics Primitives

The problem of vectorzation of the raster image is considered in the article. The algorithm of the description of raster images of straight line pieces and ellipses, as well as their elementary combinations in the form of systems of the automaton equations is offered.

Статья поступила в редакцию 24.06.2010.